



PPG | Pusat Pengembangan
Pendidik dan
Tenaga Kependidikan
prajabatan

MODUL AJAR MATEMATIKA

UNTUK KELAS XII SMA

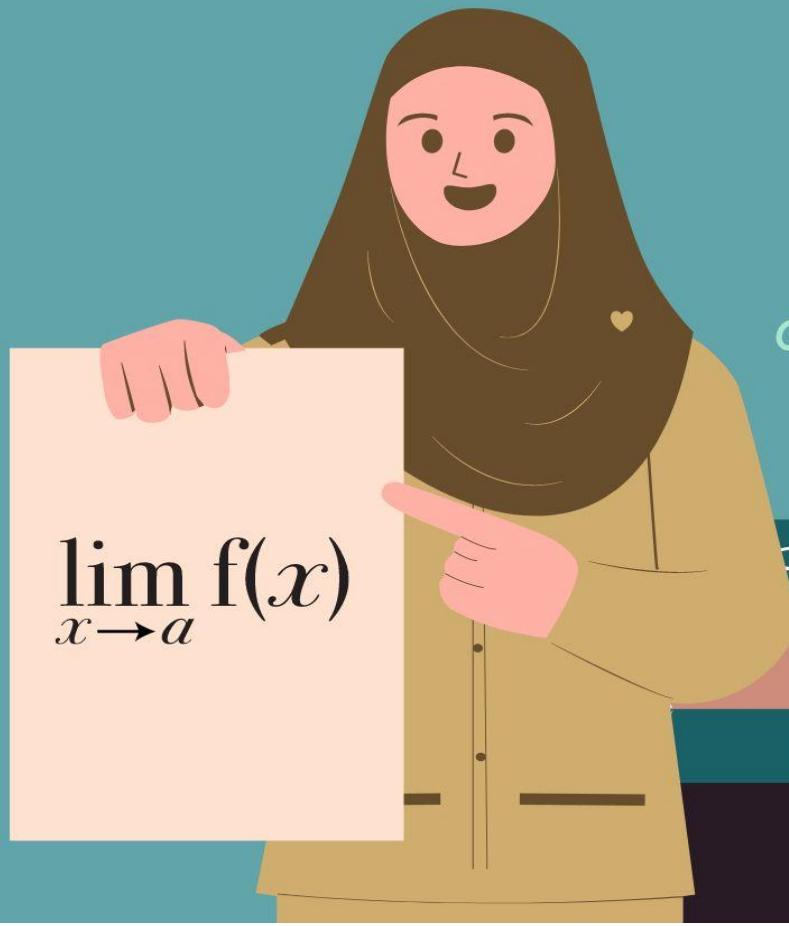
DISUSUN OLEH :
NENG RESI ARINI

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\frac{\sin}{\cos} = \tan$$





MODUL AJAR KELAS XII LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

A. INFORMASI UMUM

Penyusun	Neng Resi Arini
Satuan Pendidikan	Sekolah Menengah Atas
Kelas/Fase	XII/F+
Elemen	Kalkulus
Topik	Limit Fungsi Trigonometri
Alokasi Waktu	2JP = 2 x 45menit
Sarana dan Prasarana	Ruang kelas, LCD proyektor, papan tulis, laptop, <i>smartphone</i> , buku Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XII, bahan ajar limit fungsi trigonometri
Model, Strategi dan Metode Pembelajaran	Model Pembelajaran : Pembelajaran <i>Kooperatif</i> Metode Pembelajaran: Diskusi, presentasi Strategi Pembelajaran: <i>Teaching at The Right Level (TaRL)</i> , <i>Culturally Responsive Teaching (CRT)</i>

B. KOMPETENSI INTI

Capaian Pembelajaran	Di akhir fase F+, peserta didik dapat menerapkan konsep dasar kalkulus, yaitu limit, turunan, dan integral dalam penyelesaian masalah.
Tujuan Pembelajaran	<ol style="list-style-type: none"> 1. Peserta didik dapat memahami pengertian limit fungsi trigonometri 2. Peserta didik dapat memahami dan menentukan limit fungsi trigonometri menggunakan metode substitusi langsung
Kompetensi Awal	<ul style="list-style-type: none"> • Peserta didik dapat memahami konsep limit • Peserta didik dapat memahami operasi bilangan real • Peserta didik dapat memahami operasi aljabar • Peserta didik dapat merasionalkan bentuk akar
Apersepsi	Perhatikan gambar dibawah ini!

	 <p>Nayor merupakan salah satu ciri khas yang dimiliki oleh Cibadak, Sukabumi. Pengamat sejarah Sukabumi, Irman Firmansyah mengatakan bahwa nayor sudah ada sejak tahun 1941.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Menurut kalian, bagaimana cara kerja nayor? • Bagaimana cara penarik nayor memperkirakan batas atau limit kecepatannya agar sampai di tujuan dengan tepat waktu? • Adakah suatu cara matematis untuk memperkirakan batas kecepatan tersebut?
<p>Pertanyaan Pemantik</p>	 <ul style="list-style-type: none"> • Gambar diatas merupakan gambar? • Kacamata tersebut mempunyai lensa. Lensa apa saja yang kamu ketahui? • Bagaimana kaitannya lensa kacamata dengan limit fungsi trigonometri?
<p>Penilaian</p>	<p>Asesmen Formatif</p>
<p>Media Pembelajaran</p>	<p>Lembar Kerja Peserta Didik</p>

C. AKTIVITAS KEGIATAN

Fase	Kegiatan Pembelajaran	Alokasi Waktu
<p>Pendahuluan</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Guru membuka pembelajaran dengan salam, menyapa, dan menanyakan kabar peserta didik (beriman, bertakwa kepada Tuhan YME dan berakhlak mulia) 2. Guru bersama peserta didik mengawali 	<p>10 menit</p>

	<p>pembelajaran dengan berdoa bersama yang dipimpin oleh ketua kelas (beriman, bertakwa kepada Tuhan YME dan berakhlak mulia)</p> <p>3. Guru mengecek kehadiran peserta didik. Jika ada diantara mereka yang tidak hadir, maka guru menanyakan alasan ketidakhadirannya</p>	
Inti	Fase 1 : Menyampaikan Tujuan Pembelajaran	70 menit
	1. Guru menyampaikan tujuan pembelajaran	
	AKTIVITAS 1	
	Fase 2 : Menyajikan Informasi	
	<p>1. Guru memberikan apersepsi berupa permasalahan kontekstual terkait limit dan salah satu kegunaannya (CRT, bernalar kritis)</p> <p>2. Guru menyampaikan gambaran umum berupa peta konsep limit fungsi trigonometri</p> <p>3. Guru memberikan motivasi kepada peserta didik agar semangat dalam mengikuti pembelajaran</p> <p>4. Guru memberikan pertanyaan pemantik berupa permasalahan kontekstual terkait limit fungsi trigonometri dan manfaat mempelajari materi ini (CRT, bernalar kritis)</p> <p>5. Guru menyampaikan kegiatan pembelajaran yang akan dilakukan peserta didik, meliputi diskusi kelompok, presentasi, dan kuis.</p>	
	Fase 3: Mengorganisasikan	
<p>1. Guru membagi peserta didik secara heterogen ke dalam beberapa kelompok berdasarkan asesmen diagnostik yang berasal dari guru sebelumnya. (TaRL, bergotong royong, berkebhinekaan global)</p> <p>2. Guru menyampaikan bahwa dalam mengerjakan tugas yang diberikan, diharapkan anggota kelompok yang sudah memahami tugas yang diberikan dapat menjadi tutor sebaya bagi anggotanya yang lain (TaRL, bergotong royong)</p> <p>3. Peserta didik duduk secara</p>		

	<p>berkelompok dengan mengikuti kelompok yang telah guru tentukan (bergotong royong)</p> <ol style="list-style-type: none"> 4. Guru membagikan LKPD kepada peserta didik yang berisi 2 aktivitas, yaitu mempelajari pengertian limit fungsi trigonometri dan menentukan limit fungsi trigonometri dengan metode substitusi langsung. 5. Guru menginstruksikan kepada setiap kelompok untuk menyelesaikan aktivitas 1 terlebih dahulu, yaitu mereka diminta untuk menjodohkan yang termasuk limit fungsi trigonometri dan bukan, lalu berdasarkan hal tersebut, mereka diminta menganalisis pengertian limit fungsi trigonometri, termasuk ciri-cirinya. 	
<p>Fase 4 : Membimbing kelompok belajar dan bekerja</p>		
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Guru memantau peserta didik dengan mendatangi setiap kelompok, lalu mengajukan pertanyaan yang berkaitan dengan pengertian limit fungsi trigonometri. Apabila guru menjumpai hal berikut: (TaRL) <ul style="list-style-type: none"> • Siswa tidak teringat macam-macam fungsi trigonometri (siswa berkemampuan rendah) : maka guru dapat mengajukan pertanyaan atau mengingatkan terkait <i>sinus</i>, <i>cosinus</i>, <i>tangen</i>, <i>cosecant</i>, <i>secan</i>, dan <i>cotangent</i>. • Siswa mengetahui macam-macam fungsi trigonometri, tapi tidak dapat membedakan nilai π pada sudut dan pada aljabar (siswa berkemampuan sedang) : maka guru dapat mengingatkan bahwa nilai π untuk sudut berarti radian yang nilainya 180°, sedangkan pada aljabar, π bernilai $\frac{22}{7}$ atau 3,14. • Siswa sudah paham konsep fungsi trigonometri (siswa berkemampuan tinggi) : Guru dapat meminta 	

	<p>peserta didik tersebut untuk melanjutkan mengerjakan aktivitas 1 dan membantu teman kelompoknya yang merasa kesulitan atau menjadi tutor sebaya (bergotong royong)</p>	
	<p>Fase 5: Evaluasi (Presentasi)</p>	
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Guru melakukan pengundian secara online melalui <i>website 'wheel of names'</i> untuk menentukan kelompok yang akan tampil melakukan presentasi terhadap aktivitas 1 2. Kelompok yang muncul namanya dalam <i>website</i> tersebut melakukan presentasi. Diantara mereka ada yang bertugas menuliskan hasil pekerjaannya dan ada juga yang mempresentasikannya (bergotong royong, mandiri, kreatif) 3. Guru memberikan kesempatan kepada peserta didik untuk menanggapi kelompok yang presentasi (mandiri, berpikir kritis) 4. Guru bertanya terkait aktivitas 1 kepada kelompok yang presentasi. Jika mereka tidak dapat menjawab, pertanyaan tersebut dilemparkan kepada kelompok yang tidak presentasi. Jika masih tidak terjawab, maka guru menjelaskan ulang terkait jawaban pertanyaan yang diberikan (mandiri) 5. Guru memberikan validasi jawaban terkait aktivitas 1 melalui tayangan PPT 6. Guru mengajak peserta didik untuk menyimpulkan materi pada aktivitas 1 yaitu pengertian limit fungsi trigonometri 7. Guru memberikan apresiasi kepada kelompok yang presentasi 	
	<p>Fase 5 : Evaluasi (Kuis)</p>	
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Untuk mengetahui apakah peserta didik sudah paham pada materi aktivitas 1 ini, maka guru memberikan kuis sebagai berikut : (mandiri) Manakah diantara limit dibawah ini yang merupakan limit fungsi 	

trigonometri?

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$	b. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{\sin 2x}}}{\cos 3x}$
c. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(-x) + \cos x}{\tan x}$	d. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{x(x-7)}}{\sqrt{x} - \sqrt{7}}$

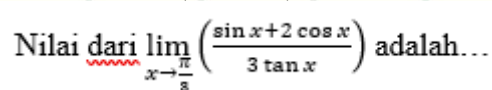
- Guru membahas kuis tersebut didepan kelas, bertanya sekaligus mengingatkan jenis-jenis fungsi trigonometri (*sin, cos, tan, cosec, sec, cot*) dan nilai π pada sudut yang bernilai 180° , sedangkan pada bentuk aljabar bernilai $\frac{22}{7}$ atau 3,14
- Guru mempersilakan peserta didik untuk mengangkat tangan jika masih ada yang masih belum mengerti terkait materi hari ini (mandiri)
- Jika tidak ada yang mengangkat tangan, maka guru bertanya secara acak kepada peserta didik terkait aktivitas 1 ini (mandiri)
- Ketika guru menemukan masih terdapat peserta didik yang masih salah dalam konsep limit fungsi trigonometri, maka guru membahas kembali aktivitas 1 dan memberikan soal latihan agar peserta didik menjadi paham terkait materi tersebut
- Ketika guru menemukan sudah banyak peserta didik yang paham, maka dilanjutkan diskusi pada aktivitas 2

AKTIVITAS 2

Fase 2 : Menyajikan Informasi

- Guru menyajikan informasi dan menjelaskan materi terkait cara perhitungan nilai limit fungsi trigonometri yang pertama, yaitu dengan menggunakan metode substitusi langsung. Setelah itu, guru memberikan satu contoh perhitungan nilai limit tersebut.
- Guru memberikan instruksi pengerjaan aktivitas 2
- Pada aktivitas 2 ini, terlebih dahulu peserta didik diminta untuk mengisi tabel nilai sudut pada fungsi trigonometri. Setelah itu, mereka

	<p>diminta untuk menghitung nilai limit fungsi trigonometri dengan berbagai bentuk dan tipe soal yang berbeda-beda (bergotong royong)</p>	
	<p>Fase 4 : Membimbing kelompok belajar dan bekerja</p> <p>1. Guru memantau peserta didik dengan mendatangi setiap kelompok dan menanyakan kesulitan mereka. Terkadang, ada juga peserta didik yang mengacungkan tangan terlebih dahulu agar guru dapat mendatangi kelompok tersebut terlebih dahulu untuk membimbing mereka. Apabila guru menjumpai hal berikut: (TaRL)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Peserta didik tidak ingat nilai sudut trigonometri (berkemampuan rendah) : maka guru dapat memberikan suplemen materi (baik secara lisan atau peserta didik diminta untuk membaca bahan ajar yang diberikan) tentang bagaimana menghafal nilai sudut fungsi trigonometri dengan cepat, yaitu dengan metode tangan kiri. • Peserta didik ingat nilai sudut trigonometri, tapi tidak dapat mengerjakan variasi soal latihan yang diberikan (berkemampuan sedang) : maka guru dapat membimbing peserta didik tersebut untuk dapat mengerjakan variasi soal yang diberikan • Peserta didik sudah paham dalam menentukan nilai limit fungsi trigonometri menggunakan substitusi langsung dengan berbagai variasi soal (berkemampuan tinggi) : Guru dapat meminta peserta didik tersebut untuk melanjutkan mengerjakan aktivitas 2 dan membantu teman kelompoknya yang merasa kesulitan atau menjadi tutor sebaya.(bergotong royong) 	
	<p>Fase 5: Evaluasi (Presentasi)</p> <p>1. Guru melakukan pengundian secara online melalui <i>website 'wheel of</i></p>	

	<p><i>names'</i> untuk menentukan beberapa kelompok yang akan tampil melakukan presentasi terhadap aktivitas 2</p> <ol style="list-style-type: none"> 2. Kelompok yang muncul namanya dalam <i>website</i> tersebut melakukan presentasi. Diantara mereka ada yang bertugas menuliskan hasil pekerjaannya dan ada juga yang mempresentasikannya (bergotong royong, mandiri, kreatif) 3. Guru memberikan kesempatan kepada peserta didik lainnya untuk menanggapi kelompok yang presentasi (mandiri, berpikir kritis) 4. Guru bertanya terkait aktivitas 2 kepada kelompok yang presentasi. Jika mereka tidak dapat menjawab, pertanyaan tersebut dilemparkan kepada kelompok yang tidak presentasi. Jika masih tidak terjawab, maka guru menjelaskan ulang terkait jawaban pertanyaan yang diberikan (mandiri) 5. Guru memberikan validasi jawaban terkait aktivitas 2 melalui tayangan PPT 6. Guru memberikan apresiasi kepada kelompok yang presentasi 7. Guru mengajak peserta didik untuk menyimpulkan materi pada aktivitas 2 yaitu menentukan limit fungsi trigonometri dengan cara substitusi langsung 	
	<p>Fase 5 : Evaluasi (Kuis)</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Untuk mengetahui apakah peserta didik sudah paham pada materi aktivitas 2, maka guru memberikan kuis berikut : (mandiri) <p style="text-align: center;">  </p> <ol style="list-style-type: none"> 2. Guru membahas kuis tersebut didepan kelas, bertanya sekaligus mengingatkan nilai π pada sudut yang bernilai 180°, sedangkan pada bentuk aljabar bernilai $\frac{22}{7}$ atau 3.14, nilai-nilai sudut pada fungsi trigonometri, dan 	

	<p>mengingatkan agar teliti dalam perhitungan</p> <ol style="list-style-type: none"> 3. Guru mempersilakan peserta didik untuk mengangkat tangan jika masih ada yang masih belum mengerti terkait materi hari ini (mandiri) 4. Jika tidak ada yang mengangkat tangan, maka guru bertanya secara acak kepada peserta didik terkait aktivitas 2 ini (mandiri) 5. Ketika guru menemukan masih terdapat peserta didik yang masih salah dalam menentukan nilai limit fungsi trigonometri dengan cara substitusi, maka guru membahas kembali aktivitas 2 dan memberikan soal latihan agar peserta didik menjadi paham terkait materi tersebut 6. Ketika guru menemukan sudah banyak peserta didik yang paham, maka pada pertemuan selanjutnya dilanjutkan dengan tujuan pembelajaran yang baru 	
<p>Penutup</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Guru bersama peserta didik melakukan refleksi akhir pembelajaran dengan menjawab pertanyaan terkait pembelajaran yang telah dilakukan sebelumnya, baik secara lisan maupun melalui <i>website 'padlet'</i>. Pertanyaan yang harus dijawab yaitu: (mandiri) <ol style="list-style-type: none"> a. <i>Apa yang telah kamu pelajari hari ini?</i> b. <i>Apa yang dimaksud dengan limit fungsi trigonometri?</i> c. <i>Apa kesulitan yang kamu hadapi saat mempelajari materi pada topik ini?</i> d. <i>Simpulkan hal-hal yang telah kamu pelajari pada hari ini!</i> 2. Guru mengingatkan kepada peserta didik untuk mempelajari materi yang akan dipelajari selanjutnya yaitu menentukan limit fungsi trigonometri pada fungsi tidak tentu (mandiri) 3. Guru mengakhiri pembelajaran dengan berdoa dan mengucapkan salam. (beriman, bertakwa kepada Tuhan YME dan berakhlak mulia) 	<p>10 menit</p>

D. GLOSARIUM

Limit	Batas atau suatu fungsi $f(x)$ akan mendekati nilai tertentu jika x mendekati nilai tertentu
Fungsi	Suatu relasi yang memetakan setiap anggota dari suatu himpunan yang disebut daerah asal (domain) ke tepat satu anggota himpunan lain yang disebut daerah kawan (kodomain)
Trigonometri	Cabang matematika yang mempelajari ilmu ukur sisi dan sudut suatu segitiga, dalam hal ini adalah segitiga siku-siku
Substitusi	Pemisalan suatu variabel terhadap nilai tertentu

E. DAFTAR PUSTAKA

- a. Wikan Budi Utami, dkk. (2022). *Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XII*. Jakarta Selatan. Pusat Perbukuan Badan Standar, Kurikulum dan Asesmen Pendidikan Kemantrian Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Teknologi.
- b. Guntoro Sigit Tri, dkk. (2020). *Modul Pembelajaran Matematika Limit Fungsi*. Jakarta. Realizing Education's Promise Madrasah Education Quality Reform.
- c. Direktorat SMA, Direktorat Jenderal PAUD, DIKDAS dan DIKMEN (2020). *Matematika Peminatan Limit Fungsi Trigonometri*.

Lampiran 1: Lembar Kerja Peserta Didik dan Kunci Jawabannya

LKPD (LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK)

Mata Pelajaran : Matematika

Materi : Limit Fungsi Trigonometri

Tujuan Pembelajaran :

1. Peserta didik dapat memahami pengertian limit fungsi trigonometri
2. Peserta didik dapat memahami dan menentukan limit fungsi trigonometri menggunakan metode substitusi langsung

Prosedur Kerja:

Kelompok :

Nama Kelompok :

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

Kelas :

AKTIVITAS 1

LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

Ayo menjodohkan!!!

Limit Fungsi Trigonometri

Bukan Limit
Fungsi Trigonometri

a. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin 2x$

b. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} 2x^3$

c. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 5}{2x + 1}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \tan 2x$

a. Mana limit fungsi yang memiliki fungsi trigonometri?

Jawab: _____

b. Mana limit fungsi yang tidak memiliki fungsi trigonometri?

Jawab: _____

SIMPULAN

Jadi, limit fungsi trigonometri adalah ...

AKTIVITAS 2

MENENTUKAN NILAI LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI DENGAN MENGUNAKAN METODE SUBSTITUSI LANGSUNG

Masih ingatkah kalian???

Mari kita *review* terlebih dahulu nilai-nilai trigonometri sudut istimewa yang telah kalian pelajari di kelas X. Kalian dapat melengkapi tabel dibawah ini.

Tabel Trigonometri Dasar

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$					
$\cos \alpha$					
$\tan \alpha$					
$\csc \alpha$					
$\sec \alpha$					
$\cot \alpha$					

Untuk selanjutnya, mari kita belajar bagaimana menyelesaikan limit fungsi trigonometri. Cara yang pertama untuk menentukan nilai limit fungsi trigonometri adalah dengan substitusi langsung. Perhatikan contoh dibawah ini!

$$\begin{aligned}
 1. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x &= \sin 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \sin \frac{\pi}{2} \\
 &= \sin 90^\circ \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Bagaimana? Mudah bukan untuk menentukan nilai limit fungsi trigonometri?

Untuk selanjutnya, ayo berlatih!

a. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3 \cos x}{\sin 2x} =$

Substitusikan $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$ ke

dalam fungsi tersebut,

diperoleh:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3 \cos x}{\sin 2x} =$$

b. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(-x) + \cos x}{\tan x} =$

Substitusikan $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ke dalam

fungsi tersebut, diperoleh:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(-x) + \cos x}{\tan x} =$$

$$c. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 2x} =$$

Substitusikan $x \rightarrow \frac{\pi}{6}$ ke dalam fungsi tersebut, diperoleh:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 2x} =$$

$$d. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2x + \sin \frac{1}{2}x}{\cos 2x} =$$

Substitusikan $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$ ke dalam fungsi tersebut, diperoleh:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2x + \sin \frac{1}{2}x}{\cos 2x} =$$

$$e. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{\sin 2x}}}{\cos 3x} =$$

Substitusikan $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ke dalam fungsi tersebut, diperoleh:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{\sin 2x}}}{\cos 3x} =$$

SIMPULAN

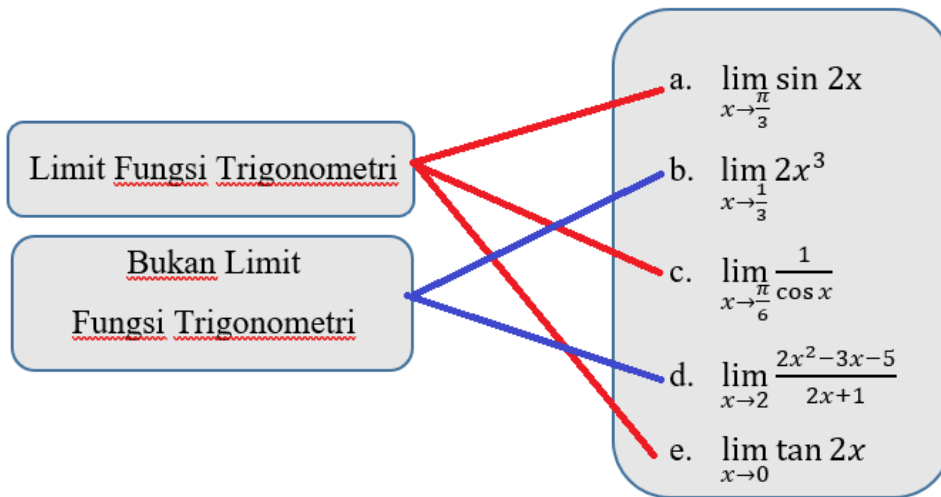
Untuk menentukan nilai limit fungsi trigonometri dengan cara substitusi langsung dilakukan dengan nilai ... yang diberikan sebagai batas limit ke dalam fungsi trigonometri

KUNCI JAWABAN LKPD

AKTIVITAS 1

LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

Ayo menjodohkan!!!



Limit Fungsi Trigonometri

Bukan Limit Fungsi Trigonometri

a. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin 2x$

b. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} 2x^3$

c. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 5}{2x + 1}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \tan 2x$

c. Mana limit fungsi yang memiliki fungsi trigonometri?

Jawab: a, c, e

d. Mana limit fungsi yang tidak memiliki fungsi trigonometri?

Jawab: b, d

SIMPULAN

Jadi, limit fungsi trigonometri adalah limit atau nilai yang mendekati suatu sudut fungsi trigonometri

AKTIVITAS 2

MENENTUKAN NILAI LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI DENGAN MENGGUNAKAN METODE SUBSTITUSI LANGSUNG

Masih ingatkah kalian???

Mari kita *review* terlebih dahulu nilai-nilai trigonometri sudut istimewa yang telah kalian pelajari di kelas X. Kalian dapat melengkapi tabel dibawah ini.

Tabel Trigonometri Dasar

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\csc \alpha$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1
$\sec \alpha$	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞
$\cot \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Untuk selanjutnya, mari kita belajar bagaimana menyelesaikan limit fungsi trigonometri. Cara yang pertama untuk menentukan nilai limit fungsi trigonometri adalah dengan substitusi langsung. Perhatikan contoh dibawah ini!

$$\begin{aligned}
 1. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x &= \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \sin \frac{\pi}{2} \\
 &= \sin 90^\circ \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Bagaimana? Mudah bukan untuk menentukan nilai limit fungsi trigonometri?

Untuk selanjutnya, ayo berlatih!

a. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3 \cos x}{\sin 2x} = \frac{3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin 2\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

Substitusikan $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$ ke

b. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(-x) + \cos x}{\tan x} =$

Substitusikan $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ke dalam fungsi tersebut, diperoleh:

dalam fungsi tersebut,
diperoleh:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3 \cos x}{\sin 2x} &= \frac{3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin 2\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{3 \cos 60^\circ}{\sin 120^\circ} \\ &= \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{3} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

c. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 2x} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

Substitusikan $x \rightarrow \frac{\pi}{6}$ ke
dalam fungsi tersebut,
diperoleh:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 2x} &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{\sin 30^\circ + \sin 60^\circ}{\sin 60^\circ} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{3} + 3)}{3}\end{aligned}$$

e. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{\sin 2x}}}{\cos 3x} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)}}}{\cos 3\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(-x) + \cos x}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sin(x) + \cos x}{\tan x} \\ &= \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{-\sin 45^\circ + \cos 45^\circ}{\tan 45^\circ} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{1} \\ &= \frac{0}{1} \\ &= 0\end{aligned}$$

d. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2x + \sin \frac{1}{2}x}{\cos 2x} = \frac{2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos 2\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

Substitusikan $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$ ke
dalam fungsi tersebut,
diperoleh:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2x + \sin \frac{1}{2}x}{\cos 2x} &= \frac{2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos 2\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{\frac{2\pi}{3} + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{\frac{2\pi}{3} + \sin 30^\circ}{\cos 120^\circ} \\ &= \frac{\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{4\pi + 3}{6} \cdot -\frac{2}{1} \\ &= -\frac{4\pi + 3}{3}\end{aligned}$$

Substitusikan $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ke dalam fungsi

tersebut, diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2-\sqrt{\sin 2x}}}{\cos 3x} &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)}}}{\cos 3\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\
 &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}}}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \\
 &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{\sin 90^\circ}}}{\cos 135^\circ} \\
 &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{1}}}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{2-1} \cdot -\frac{2}{\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{1} \cdot -\frac{2}{\sqrt{2}} \\
 &= -\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\
 &= -\frac{2}{2}\sqrt{2} \\
 &= -\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

SIMPULAN

Untuk menentukan nilai limit fungsi trigonometri dengan cara substitusi langsung dilakukan dengan mengganti nilai x yang diberikan sebagai batas limit ke dalam fungsi trigonometri

Lampiran 2: Lembar Assesmen (Kuis) dan Jawabannya

ASESMEN FORMATIF : KUIS

1. Mana diantara limit dibawah ini yang merupakan limit fungsi trigonometri?
Berikan alasannya!

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$	b. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{\sin 2x}}}{\cos 3x}$
c. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(-x) + \cos x}{\tan x}$	d. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{x}(x-7)}{\sqrt{x} - \sqrt{7}}$

2. Nilai dari $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin x + 2 \cos x}{3 \tan x} \right)$ adalah...

KUNCI JAWABAN ASESMEN FORMATIF : KUIS

1. Mana diantara limit dibawah ini yang merupakan limit fungsi trigonometri?

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$	b. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{\sin 2x}}}{\cos 3x}$
c. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(-x) + \cos x}{\tan x}$	d. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{x}(x-7)}{\sqrt{x} - \sqrt{7}}$

Dari keempat pilihan diatas, yang termasuk limit fungsi trigonometri adalah bagaian b dan c. Hal ini karena pada pilihan b dan c terdapat fungsi trigonometri berupa sin, cos, dan tangen. Selain itu, variable independent (x) nya menuju π radian.

2. Nilai dari $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin x + 2 \cos x}{3 \tan x} \right)$ adalah...

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin x + 2 \cos x}{3 \tan x} \right) &= \left(\frac{\sin \frac{\pi}{3} + 2 \cos \frac{\pi}{3}}{3 \tan \frac{\pi}{3}} \right) \\ &= \left(\frac{\sin 60^\circ + 2 \cos 60^\circ}{3 \tan 60^\circ} \right) \end{aligned}$$



$$= \left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2\left(\frac{1}{2}\right)}{3\sqrt{3}} \right)$$

$$= \left(\frac{\frac{\sqrt{3} + 1}{2}}{3\sqrt{3}} \right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{6\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{6 \cdot 3} \right)$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{18}$$

Lampiran 3: Rubrik Penilaian Asesmen

RUBRIK PENILAIAN ASESMEN FORMATIF : KUIS

Soal Nomor 1

Indikator	Skor
Peserta didik dapat mengidentifikasi limit fungsi trigonometri dan menjelaskan ciri-cirinya dengan tepat	100
Peserta didik dapat mengidentifikasi limit fungsi trigonometri, tapi tidak dapat menjelaskan ciri-cirinya dengan tepat	65
Peserta didik tidak dapat mengidentifikasi limit fungsi trigonometri dan menjelaskan ciri-cirinya dengan tepat	10

Soal nomor 2

Indikator	Skor
Peserta didik dapat menjelaskan langkah-langkah untuk menentukan limit fungsi trigonometri dengan cara substitusi langsung dan jawaban yang diberikan tepat	100
Peserta didik dapat menjelaskan langkah-langkah untuk menentukan limit fungsi trigonometri dengan cara substitusi langsung dan jawaban yang diberikan belum tepat	65
Peserta didik tidak dapat menjelaskan langkah-langkah untuk menentukan limit fungsi trigonometri dengan cara	25

substitusi langsung dan jawaban yang diberikan tepat	
Peserta didik tidak dapat menjelaskan langkah-langkah untuk menentukan limit fungsi trigonometri dengan cara substitusi langsung dan jawaban yang diberikan tidak tepat	5

$$Total\ Nilai = \frac{Total\ Skor}{2}$$

Perolehan Nilai	Kategori
Apabila nilai ≥ 90	Pemberian pengayaan
Apabila nilai 75-89	Menunjukkan penguasaan yang baik terhadap materi
Apabila nilai < 75	Perlu adanya suplemen materi, pendampingan dan remidi

Lampiran 4: Lembar Refleksi Peserta Didik

REFLEKSI PEMBELAJARAN PESERTA DIDIK

Nama :

Kelas :

No. Presensi :

a. Apa yang telah kamu pelajari hari ini?

b. Apa yang dimaksud dengan translasi pada suatu fungsi?

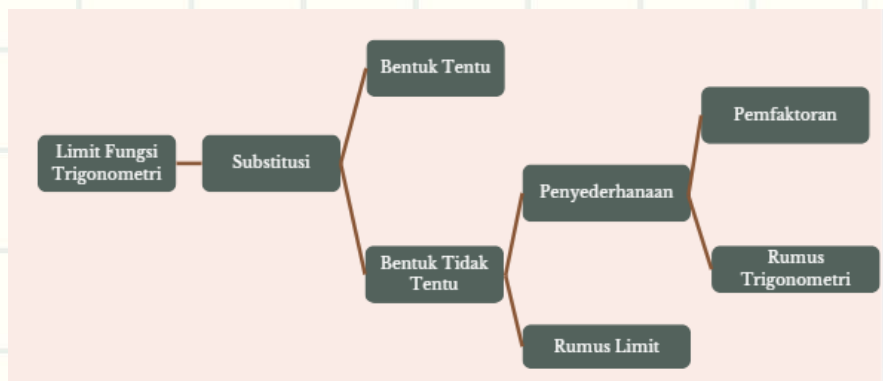
c. Apa kesulitan yang kamu hadapi saat mempelajari materi pada topik ini

d. Simpulkan hal-hal yang telah kamu pelajari pada hari ini.

Lampiran 5: Bahan Ajar

BAHAN AJAR
LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

Limit fungsi trigonometri adalah nilai yang mendekati suatu sudut fungsi trigonometri. Variabel independent (x) pada limit fungsi trigonometri menggunakan satuan radian, bukan dalam satuan derajat. Untuk menentukan nilai limit fungsi trigonometri tergantung bentuknya. Jika bentuk limit fungsi trigonometrinya tentu, maka cara yang digunakan adalah metode substitusi langsung. Namun, jika bentuknya tak tentu, maka cara yang digunakan adalah penyederhanaan (pemfaktoran atau rumus trigonometri), rumus limit, atau campuran dari semuanya. Untuk lebih jelasnya, perhatikan *mindmap* berikut!



Gambar 1.1 *Mindmap* Cara Menyelesaikan Limit Fungsi Trigonometri

Berikut penjelasan terkait cara menyelesaikan nilai limit fungsi trigonometri

1. Metode Substitusi

Penerapan metode substitusi dalam menentukan atau menyelesaikan limit fungsi trigonometri yakni dengan langsung mengganti x dengan angka yang tertera di soal atau dapat dituliskan sebagai berikut:

substitusi \rightarrow $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$	$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} a$
$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$	$\lim_{x \rightarrow a} \sec x = \sec a$
$\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$	$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{cotan} x = \operatorname{cotan} a$

Contoh:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x &= \sin 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{2} \\ &= \sin 90^\circ \\ &= 1\end{aligned}$$

2. Menggunakan Rumus Dasar Limit Fungsi Trigonometri

Jika bentuk limit fungsi trigonometrinya adalah tak tentu $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty\right)$, maka salah satu cara penyelesaiannya adalah menggunakan rumus dasar limit trigonometri. Berikut disajikan rumus dasar limit trigonometri:

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b} \end{array} \quad \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax + \tan bx}{cx - \sin dx} = \frac{a+b}{c-d} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \end{array}$$

Contoh:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 5x}{3x \tan 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\tan 2x} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} \\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

3. Pemfaktoran

Penerapan metode pemfaktoran dilakukan ketika menemukan jawaban dengan bentuk tak tentu $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty\right)$. Pemfaktoran adalah metode untuk menghilangkan pembuat nol dalam fungsi tersebut.

Contoh:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x^2 + 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+2)}\end{aligned}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{0+2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

4. Menyederhanakan rumus trigonometri

Jika substitusi nilai yang didekati x ke $f(x)$ menghasilkan bentuk tak tentu $(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty)$, maka untuk menyelesaikan nilai limit fungsi trigonometrinya dapat dengan menyederhanakan bentuknya menggunakan identitas trigonometri.

Contoh:

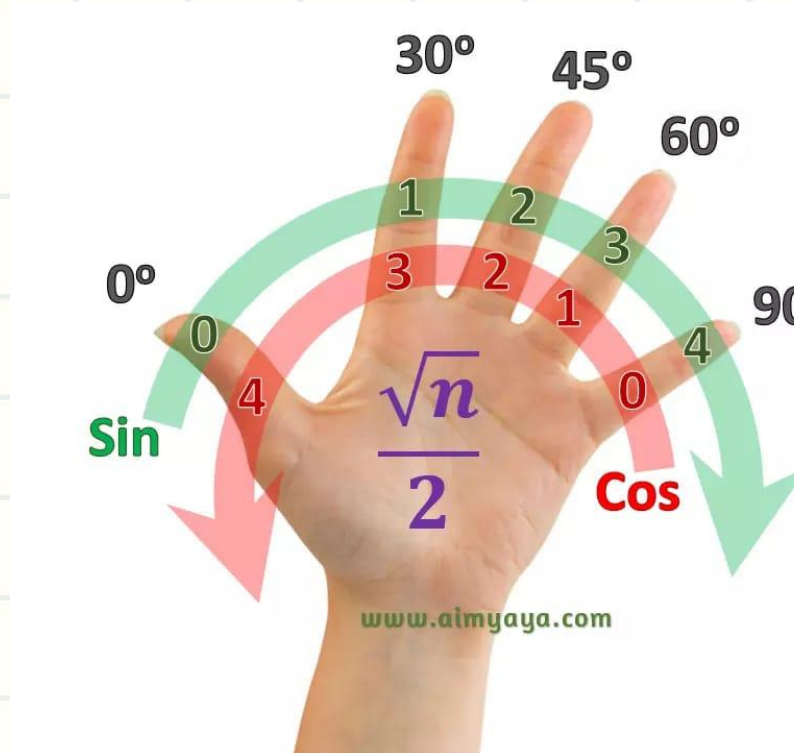
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x) \\ &= \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Lampiran 6: Suplemen Materi

MENENTUKAN NILAI SUDUT TRIGONOMETRI MENGGUNAKAN TANGAN KIRI

Bagaimana cara kamu menghafal nilai sudut pada trigonometri? Apakah menghafalnya satu persatu? Atau ada cara lain?

Ternyata, untuk menghafal nilai sudut pada trigonometri kamu hanya perlu menggunakan jari kiri loh! Yuk, coba praktikan!



Gambar 1.2 Nilai Sudut Trigonometri dengan Jari Kiri

Berikut langkah-langkah untuk menghafal nilai sudut trigonometri dengan jari kiri:

1. Simpan nilai 0 pada jari jempol, $\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$ pada jari telunjuk, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ pada jari tengah, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ pada jari manis, dan $\frac{1}{2}\sqrt{4} = 2$ pada jari kelingking.
2. Jarak dari ibu jari ke jari telunjuk 30°, dari jari telunjuk ke jari tengah 15°, dari jari tengah ke jari manis 15°, dan dari jari manis ke jari kelingking 30°.
3. Untuk sinus, maka perhitungan nilai sudut dimulai dari ibu jari menuju

kelingking. Sedangkan untuk cosinus dimulai dari jari kelingking menuju ibu jari.

4. Besar sudut sinus maupun cosinus dengan menjumlahkan tiap jarak pada setiap jari. Kelima jari jika dijumlahkan sudutnya maksimal adalah 90° . Untuk menentukan sudut selanjutnya yaitu dengan berbalik arah. Misalnya nilai sinus 90° ada di jari kelingking. Maka langkah selanjutnya adalah kembali ke jari manis dengan jarak 30° , sehingga nilai besar sudut pada jari manis selanjutnya adalah $90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$, begitu seterusnya sampai dengan 360° .

Lampiran 7: Powerpoint



Matematika Fase F

LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

TUJUAN PEMBELAJARAN

Mapel : Matematika
Kelas : XII (Fase F)
Materi : Limit Fungsi Trigonometri

Tujuan :

- Peserta didik dapat memahami pengertian limit fungsi trigonometri
- Peserta didik dapat memahami dan menentukan limit fungsi trigonometri menggunakan metode substitusi langsung

Perhatikan gambar dibawah ini!



Nayor merupakan salah satu ciri khas yang dimiliki oleh Cibadak, Sukabumi. Pengamat sejarah Sukabumi, Irman Firmansyah mengatakan bahwa nayor sudah ada sejak tahun 1941.

- Menurut kalian, bagaimana cara kerja nayor?
- Bagaimana cara penarik nayor memperkirakan batas atau limit kecepatannya agar sampai di tujuan dengan tepat waktu?
- Adakah suatu cara matematis untuk memperkirakan batas kecepatan tersebut?

Peta Konsep

```

    graph LR
      A[Limit Fungsi Trigonometri] --> B[Substitusi]
      A --> C[Bentuk Tidak Tentu]
      B --> D[Bentuk Tentu]
      B --> E[Bentuk Tidak Tentu]
      C --> F[Penyederhanaan]
      C --> G[Rumus Limit]
      F --> H[Perfaktoran]
      F --> I[Rumus Trigonometri]
  
```

Pertanyaan Pemantik



- Gambar disamping merupakan gambar?
- Kacamata tersebut mempunyai lensa. Lensa apa saja yang kamu ketahui?



Limit trigonometri digunakan untuk menghitung besaran atau besarnya jarak dari pusat optik atau lensa cahaya (convex lens) ke titik fokus utama (principal focal length).

Tujuannya tentu saja untuk membantu para penderita rabun jauh agar bisa melihat lebih jelas.

KEGIATAN HARI INI



Diskusi Presentasi Quiz

Pembagian Kelompok

Kelompok 1 Rasidah Nadia Helsi Zakia	Kelompok 2 Winda Nabila Naufal M Rif'q	Kelompok 3 Putri Widya Yasmin MH Rachel	Kelompok 4 Bilqis Frisila Bima Naila	Kelompok 5 Raihan Berliana Naya Fitri
Kelompok 6 Adzra Aurelia Satyo Sultan	Kelompok 7 Achmad Nazhira Siti Hanifah Syawal	Kelompok 8 Cut Neng Alisa Laudya Christian	Kelompok 9 Dinda Alysa Fadhilah Peony Regita	

LKPD 1

Mana yang lebih baik??

Limit Fungsi Trigonometri

Bahan Dasar Fungsi Trigonometri

- Mana limit fungsi yang memiliki fungsi trigonometri?
Jawab: a, c, e
- Mana limit fungsi yang tidak memiliki fungsi trigonometri?
Jawab: b, d

SIMPULAN

Jadi, limit fungsi trigonometri adalah limit atau nilai yang mendekati suatu sudut fungsi trigonometri

KUIS 1

Mana diantara limit dibawah ini yang merupakan limit fungsi trigonometri? Berikan alasannya!

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$	b. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{\sin 2x}}{\cos 3x}$
c. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) + \cos x}{\tan x}$	d. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

JAWABAN KUIS 1

Mana diantara limit dibawah ini yang merupakan limit fungsi trigonometri?

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$	b. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{\sin 2x}}{\cos 3x}$
c. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) + \cos x}{\tan x}$	d. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

Dari keempat pilihan diatas, yang termasuk limit fungsi trigonometri adalah bagian b dan c. Hal ini karena pada pilihan b dan c terdapat fungsi trigonometri berupa sin, cos, dan tangen. Selain itu, variable independent (x) nya menuju π radian.

Pengantar Materi

Untuk selanjutnya, mari kita belajar bagaimana menyelesaikan limit fungsi trigonometri. Cara yang pertama untuk menentukan nilai limit fungsi trigonometri adalah dengan substitusi langsung. Perhatikan contoh dibawah ini!

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x &= \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{2} \\ &= \sin 90^\circ \\ &= 1 \end{aligned}$$

a. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

b. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2(\frac{\pi}{4}) + \sin^2(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

c. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\pi}{4})}{\cos^2(\frac{\pi}{4})} = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{2}{4}} = 1$

d. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\tan(\frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\pi}{4})}{\cos^2(\frac{\pi}{4})} = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

LKPD 2

e. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{\sin 2x}}{\cos 2x} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{\sin(\frac{\pi}{2})}}{\cos(\frac{\pi}{2})} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{0} = \frac{\sqrt{2} - 1}{0}$

f. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{\sin 2x}}{\cos 2x} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{\sin(\frac{\pi}{2})}}{\cos(\frac{\pi}{2})} = \frac{\sqrt{2} - 1}{0}$

g. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{\sin 2x}}{\cos 2x} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{\sin(\frac{\pi}{2})}}{\cos(\frac{\pi}{2})} = \frac{\sqrt{2} - 1}{0}$

Tabel Trigonometri Dasar

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\csc \alpha$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec \alpha$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
$\cot \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

LKPD 2



LKPD 2

SIMPULAN

Untuk menentukan nilai limit fungsi trigonometri dengan cara substitusi langsung dilakukan dengan menganti nilai x yang diberikan sebagai batas limit ke dalam fungsi trigonometri

KUIS 2



Nilai dari $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\frac{\sin x + 2 \cos x}{3 \tan x})$ adalah...

JAWABAN KUIS 2

Nilai dari $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\frac{\sin x + 2 \cos x}{3 \tan x})$ adalah...

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin x + 2 \cos x}{3 \tan x} \right) &= \left(\frac{\sin \frac{\pi}{3} + 2 \cos \frac{\pi}{3}}{3 \tan \frac{\pi}{3}} \right) \\ &= \left(\frac{\sin 60^\circ + 2 \cos 60^\circ}{3 \tan 60^\circ} \right) \\ &= \left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}{3\sqrt{3}} \right) \\ &= \left(\frac{\frac{\sqrt{3} + 1}{2}}{3\sqrt{3}} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{6 \cdot 3} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{18} \end{aligned}$$

Refleksi Pembelajaran



1. Apa yang telah kamu pelajari hari ini?
2. Apa yang dimaksud dengan limit fungsi trigonometri?
3. Apa kesulitan yang kamu hadapi saat mempelajari materi pada topik ini?
4. Simpulkan hal-hal yang telah kamu pelajari pada hari ini!



SEKIAN DAN TERIMAKASIH

